

Справка за научните приноси в дисертация

с тема

„Функции холоморфни над крайномерни комплексни комутативни асоциативни алгебри – някои локални, глобални и универсални аспекти“

от

Марин Владимиров Генов

докторант на самостоятелна подготовка към секция „Анализ, геометрия и топология“ на ИМИ-БАН,

Дисертацията обобщава основната теория на комплексно-диференцируемите функции в равнината със стойности в крайномерно комплексно векторно пространство V като заменя полето $\mathbb{C}$ в дефиниционната област с крайномерна комутативна асоциативна унитарна $\mathbb{K}$ -алгебра $\mathcal{A}$ за $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, а V с крайнопороден $\mathcal{A}$ -модул ${}_A M$. Такива функции ще наричаме най-общо $\mathcal{A}$ -диференцируеми. Специално внимание се обръща на това, кои резултати всъщност не изискват „пълна“ комплексна структура, а само частични свойства на $\mathbb{C}$, респективно $\mathcal{A}$, като напр. само комутативност, и за кои резултати наличието на комплексна структура е строго необходимо, както и точните причини за това, напр. свързаност на групата $\mathbb{C}^\times$. Там, където вече съществуват такива частични обобщения в литературата, резултати в дисертацията са не само по-общи, но и често много по-силни и дори в определен тесен смисъл максимално такива в съответните частни случаи, отчасти благодарение на въведения от мен *спектрален подход* в крайномерната комутативна аналитична теория. По-точно:

- (1) Въведени и изследвани са *относителни* понятия за диференцируемост спрямо крайномерно представяне $\rho: \mathcal{A} \rightarrow \text{End}_{\mathbb{K}}(M)$ или морфизъм $\varphi: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ на такива алгебри. Като цяло особено внимание е отделено на случая на ниска регулярност за $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, т.е. диференцируемост без непрекъснатост на производната по аналогия на холоморфните функции. В частност е въведен и изследван междинен сноп / клас на регулярност $\mathcal{F}_\rho^{\text{str}}$, който има по-добро поведение от по-стандартните дефиниции спрямо някои ключови категорни конструкции.
- (2) По-общо, изследвано е взаимодействието на аналитичната теория (няколко различни основни класове на регулярност на $\mathcal{A}$ -диференцируемост) с някои основни алгебрични и категорно-теоретични конструкции. Например, доказана е натуралност на съответните структурни снопове спрямо вътрешни и външни *директни* произведения на представяния.
- (3) Като продължение на предишната точка, изведени са редица основни факторизации и автоматични продължения на $\mathcal{A}$ -диференцируеми функции и е доказана тяхна *стандартна факторизация* в общия случай. В частност се показва, че за аналитичните цели е достатъчно да се разглеждат само верни неразлагаеми представяния на локални Артинови $\mathbb{K}$ -алгебри.
- (4) Дори за частния случай ${}_A M = \mathcal{A}$ е дадено *директно, чисто аналитично/топологично* доказателство на основния факт, че $\mathcal{L}_{\mathcal{A}}$ -регулярните функции са непрекъснати и Фреше диференцируеми, замествайки изцяло *алгебричния подход* на Waterhouse (Expo. Math., 1992).
- (5) Доказана е много по-силна форма на първата основна теорема на Gadea–Masque (Proc. Amer. Math. Soc., 1996) за една $\mathcal{A}$ -променлива (но по-общо за функции със стойности в ${}_A M$).
- (6) Изведени са обобщени оператори на Виртингер, *универсални* за всички $\mathcal{A}$.
- (7) Доказана е обобщена теорема на Коши–Гурса за $\mathcal{A}$ -диференцируеми функции със стойности в ${}_A M$. Доказана е безкрайната интегрируемост на $\mathcal{A}$ -диференцируеми функции за широк клас от области.
- (8) Въведени са основните алгебро-топологични инварианти, които управляват постановката $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.
- (9) Дадена е **пълна характеристикация** на аналога на аналитичния индекс на крива в комплексната равнина, значително подобрявайки частичните резултати на Rizza (1952), Edenhoffer (1973, 1976), и Shpakivskyi (2015).
- (10) Изведени са градиращи по сила обобщени интегрални формули на Коши, вкл. хомотопична такава за общи области. Доказана е *максимално* хомологично обобщение на интегралната формула на Коши при много по-слаби топологични допускания, давайки значително по-силен резултат от известния до момента, който е на Rizza (1952).
- (11) Доказано е *канонично* $\mathcal{A}$ -холоморфно продължение на $\mathcal{A}$ -холоморфните функции и е изведена пълна характеристикация на областите на $\mathcal{A}$ -холоморфност.
- (12) Изведена е трансформация на Коши над $\mathcal{A}$.
- (13) Доказана е обобщена теорема на Коши–Помпею за компактни ориентируеми повърхнини $\Sigma \subset \mathcal{A}$ в обща позиция спрямо радикала. Приложена към холоморфни изображения, тя дава за тях своеобразна нискоразмерна формула на Бохнер–Мартинели над Σ с ненулев повърхнинен интегрален член, но затова пък с *холоморфни ядра*.